

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة



المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين
لجهة الدار البيضاء مكناس

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين لجهة الدار البيضاء مكناس
Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation Casablanca-Settat

POLYCOPIE DE COURS

COMPLEMENT DE FORMATION

LOGIQUE ET RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

- NOMBRES -

Prof. BENYOUNES BETTIOUI

I-BREVE DESCRIPTION DES MATHEMATIQUES :

I.1-VOCABULAIRE USUEL :

↗ Définition :

Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet mathématique

↗ Axiome :

Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.

Exemple :

*Un des axiomes de la géométrie euclidienne a pour énoncé :
« Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ».

*Les axiomes de PEANO qui définissent l'ensemble des entiers naturels. Le cinquième axiome affirme que :
« Si A est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de A est dans A , alors $A = \mathbb{N}$ » Cet axiome s'appelle axiome de récurrence.

↗ Proposition (ou assertion) :

Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux

Le mot veut dire qu'on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.

↗ Théorème :

Un théorème est une proposition vraie

Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de

moindre importance, et même on a tendance à appeler proposition la plupart des théorèmes pour réserver le mot théorème aux plus grands d'entre eux (théorème de PYTHAGORE ; théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de ROLLE ; théorème du point fixe ; théorème de GAUSS ; théorème de FERMAT ; ...).

✚ Corollaire :

Un corollaire à un théorème est un théorème qui en est conséquence

Exemple :

Théorème des valeurs intermédiaires : « L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle ».

Corollaire de ce théorème : « Si une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend au moins une valeur positive et au moins une valeur négative, alors cette fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle ».

✚ Lemme :

Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

✚ Conjecture :

Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer

Les conjectures sont le moteur du progrès des mathématiques. Tel ou tel mathématicien a eu l'impression que tel ou tel résultat important était vrai et l'a énoncé sans pouvoir le démontrer, laissant à l'ensemble de la communauté mathématique le soin de la confirmer par une démonstration convaincante ou de l'infirmier.

CONJECTURES RESOLUES :

Ces conjectures sont maintenant des théorèmes

Conjecture de Fermat :

Pour n entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers x , y et z tous non nuls vérifiant l'équation suivante :

$$x^n + y^n = z^n$$

En 1670 Pierre de Fermat propose cette équation dans la marge de son exemplaire du livre « Arithmetica de Diophante » et indique qu'il en a trouvé une merveilleuse démonstration. Les mathématiciens estiment qu'une démonstration accessible à Fermat ne peut exister. En effet, il fallut de nombreuses tentatives ainsi que près de 350 ans d'efforts pour qu'une preuve en soit donnée en 1995 par le mathématicien Andrew Willes.

Conjecture de Poincaré :

En 1904 Henri Poincaré lance une conjecture qui caractérise la sphère parmi les espaces fermés. En 2002-2003 le mathématicien russe Grigori Perelman de Saint-Petersbourg a mis sur internet trois articles prouvant cette conjecture.

Conjecture de Goldbach :

Tout nombre entier pair strictement supérieur à 3 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.

Exemples :

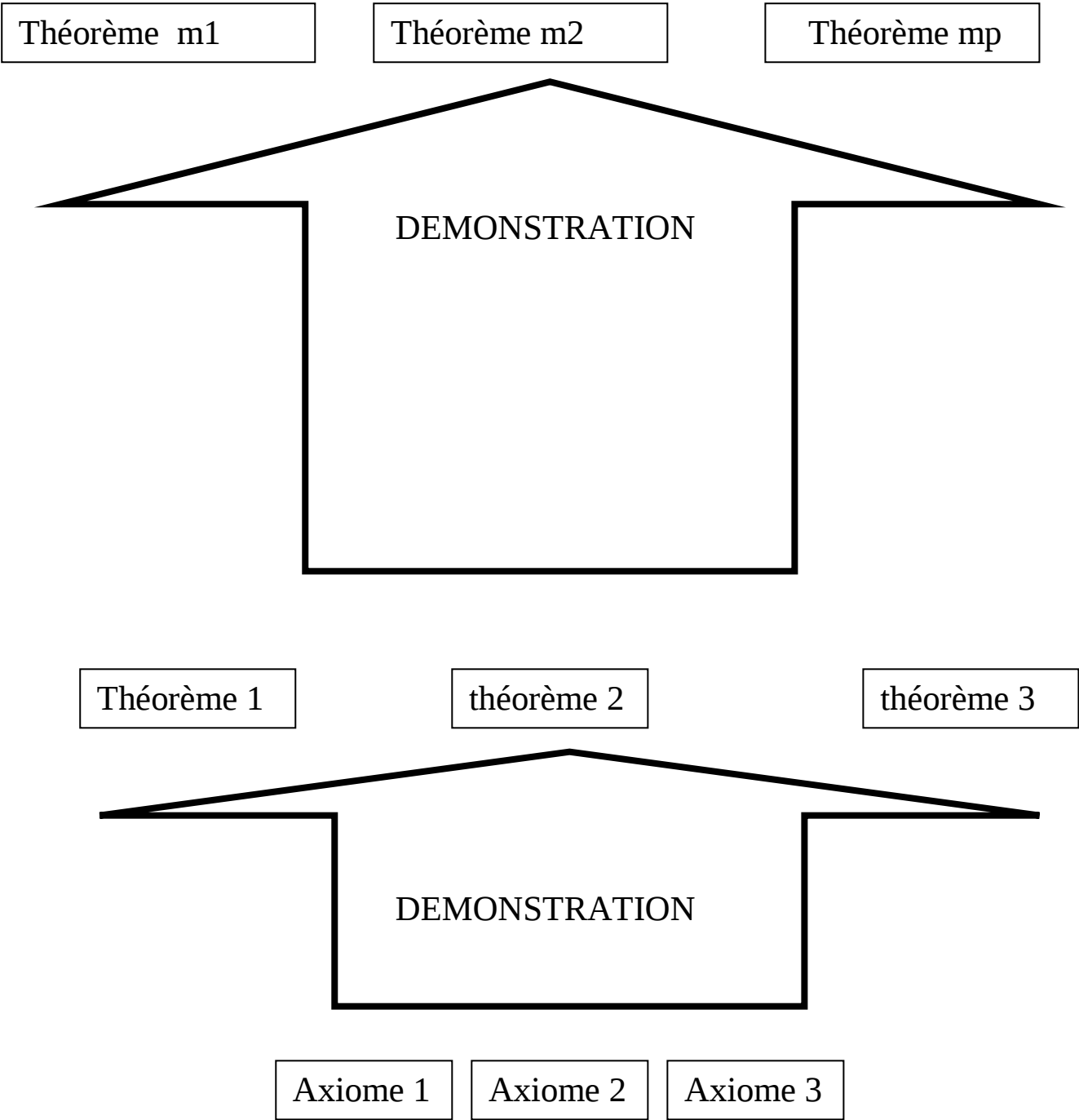
$4 = 2 + 2$	$12 = 5 + 7$
$6 = 3 + 3$	$14 = 3 + 11 = 7 + 7$
$8 = 3 + 5$	$16 = 3 + 13 = 5 + 11$
$10 = 3 + 7 = 5 + 5$	

L'énoncé de la conjecture est équivalent à :

« tout nombre entier strictement supérieur à 1 est la moyenne arithmétique de deux nombres premiers ».

Cette conjecture est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la théorie des nombres, il date de 1742.

I.2-BATISSEMENT D'UNE THEORIE MATHEMATIQUE :



II-APERÇU HISTORIQUE :

Pour les mathématiques de l'antiquité, un nombre est un entier ou une fraction. En outre les considérations géométriques étant reines à l'époque, un nombre est souvent le représentant de la longueur d'un segment d'une droite.

L'idée de nombre qu'Euclide présente dans son traité est donc géométrique. Pour lui un nombre a est mesurée par un nombre b si l'on peut faire tenir a un nombre de fois donnée dans b . dans le langage moderne cela revient à dire que « a mesure b » si « b est un multiple de a ».

III-ENSEMBLES DE NOMBRES :

➤ $\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels
= 0,1,2,3,.....

➤ $\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs

Un entier relatif se présente comme un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif. Donc :

$$\mathbb{Z} = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

➤ $\mathbb{D}$ = ensemble des nombres décimaux.

Un nombre décimal est un nombre qui peut se mettre sous forme d'une fraction dont le numérateur est un entier et le dénominateur est une puissance de 10. donc :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$

➤ $\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres rationnels.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'un rapport de deux entiers dont le dénominateur est non nul . donc :

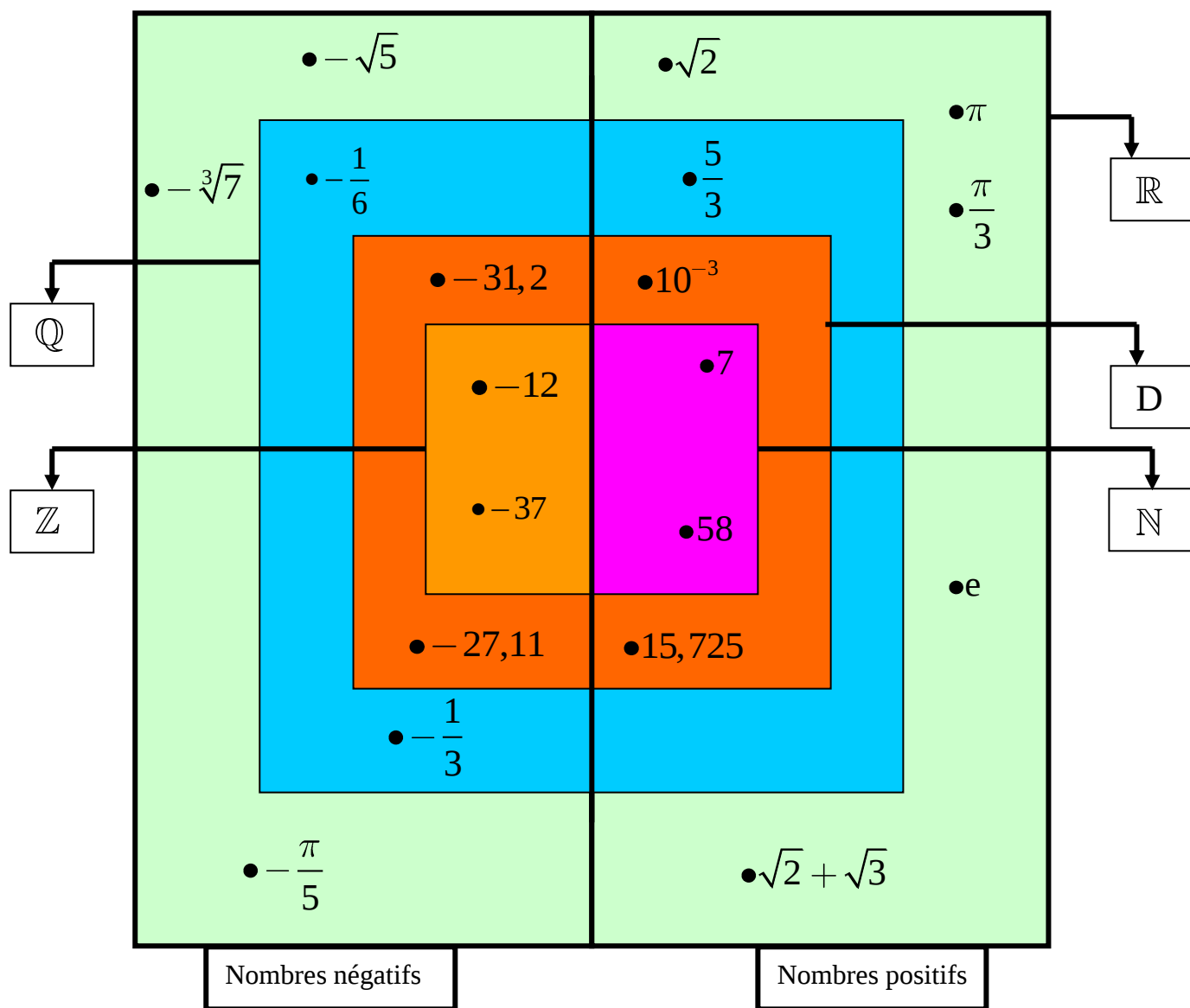
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

➤ $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
= $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

➤ $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous forme de quotients de deux entiers relatifs. On s'est aperçu de l'existence de tels nombres depuis l'antiquité (comme $\sqrt{2}$).

On peut ainsi schématiser ces différents ensembles comme suit :



Remarque :

Il existe d'autres extensions des ensembles de nombres à savoir :

*l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

$$\mathbb{C} = a + ib / a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1$$

*l'ensemble K des quaternions introduit en 1843 par le mathématicien HAMILTON.

$$K = a + bi + cj + dk / a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } i, j, k$$

$$\text{Vérifient : } i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

C'est une algèbre à 4 dimensions sur les réels sauf que dans cet algèbre on perd la commutativité.

*l'ensemble O des octonions qui est une extension non-associative des quaternions c'est une algèbre à 8 dimensions sur les réels.

*l'ensemble S des sédénions qui est une extension de l'ensemble O et forme une algèbre à 16 dimensions sur les réels.

La multiplication des sédénions est, comme celle des octonions, ni commutative, ni associative. A noter que les sédénions perdent la propriété d'alternativité que possèdent les octonions.

Il existe donc un grand nombre d'algèbre au dessus de l'algèbre des réels et des complexes. Ces algèbres au grand nombre de dimensions relèvent de la jonglerie mathématique mais trouvent certaines applications dans la physique et l'informatique. L'ajout de dimension permet de traiter certains problèmes de manière mieux adaptée qu'avec certains outils mathématiques plus anciens.

1.1-L'ensemble des entiers naturels :

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ on distingue deux catégories de nombres :

Nombres paires et les nombres impaires.

On cite aussi l'ensemble P des nombres premiers.

Définition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

p est dit premier s'il a exactement deux diviseurs 1 et p

L'intérêt des nombres premiers réside dans le fait que tout nombre entier non nul peut s'écrire de façon unique comme facteur de nombre premiers. De ce fait, on peut dire que les nombres premiers jouent le rôle de briques élémentaires pour la fabrication des nombres entiers. Notons aussi que P est infini.

Il sont en effet à la base de tous les systèmes de cryptographie actuels. Les codages militaires, bancaires et internet utilisent tous des propriétés de nombres premiers.

➤ Citons quelques grands nombres premiers

*Un nombre de fermat en 1640 : 616318177

*Un nombre d'Euler en 1732 : $2^{31} - 1 = 2147483647$

*Un nombre en 1963 : $2^{11213} - 1$ avec 3376 chiffres

*Un nombre en 1971 : $2^{19937} - 1$ avec 6002 chiffres.

➤ Notons que les nombres premiers se font plus rares dès qu'ils deviennent plus grands :

*entre 1 et 10, il y a 40% de nombres premiers.

*entre 1 et 100, il y'en a 25 %.

*entre 1 et 1000, on trouve 14,4 %

*entre 1 et 1.000.000.000 il n'y en a plus de 4,8 %.

➤ Une façon simple pour trouver des nombres premiers inférieurs à n a été proposé par Eratosthène (III^{ème} av. JC), s'appelle le crible, elle consiste à :

- *Ecrire tous les entiers de 2 à n .
- *Enlever (ou barrer) les multiples de 2 sauf 2.
- *Récupérer le plus petit nombre non barré, c'est-à-dire 3, et barrer les multiples de 3 sauf 3.
- *Etc ...
- *On s'arrête dès qu'on a atteint la racine carrée de n .

➤ Citons quelques théorèmes sur les nombres premiers

Théorème 1 : P est infini

Théorème 2 :

Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x on a :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

(la démonstration est donnée par J. Hadamard et C.J de la Vallée-Poussin en 1896)

Théorème de raréfaction de Legendre (1752-1833)

$$\frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 0 \quad \text{qd } x \rightarrow +\infty$$

(c'est une conséquence directe du théorème 2)

N.B : Legendre a démontré ce théorème bien avant et avait conjecturé le résultat du théorème 2)

Théorème de raréfaction d'Euler (1707-1783)

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = +\infty$$

1.2-L'ensemble des entiers relatifs :

En mathématiques, un entier relatif se présente comme un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif qui indique sa position par rapport à zéro sur un axe orienté.

Fragments d'histoire :

La première allusion à des nombres négatifs apparaît chez les indous et les chinois (au 1^{er} siècle), comme représentant des dettes et les nombres positifs comme des recettes. Cependant le nombre reste encore attaché à des quantités physiques et le nombre négatif n'a guère le statut légal. Pour ceux qui admettent l'usage des nombres négatifs, les grandes difficultés sont de justifier :

*l'existence de quantités négatives isolées : si zéro c'est « rien », une quantité négative est « moins que rien », quel sens lui donner ?

*la règle des signes pour le produit. L'usage du modèle des gains et des pertes introduit naturellement l'addition, mais pose problème pour la multiplication. Quel sens a une phase comme : « une dette multipliée par une dette donne un bien ? »

Le problème étant que le nombre est vu en relation avec une opération de dénombrement ou de mesure. Une grandeur ne peut être plus petite que zéro car cela revient à concevoir une quantité négative comme moins que rien et c'est effectivement une impasse.

De ce fait, les nombres négatifs posent vraiment des difficultés spécifiques aux élèves. D'une part, pour la première fois, ils sont confrontés à des nombres qui n'expriment pas des quantités ou des grandeurs. Ce qui constitue une rupture importante avec les nombres manipulés jusque là. D'autre part, la notation habituelle de ce nombre utilise le signe qui est, pour les élèves lié à une opération, la soustraction.

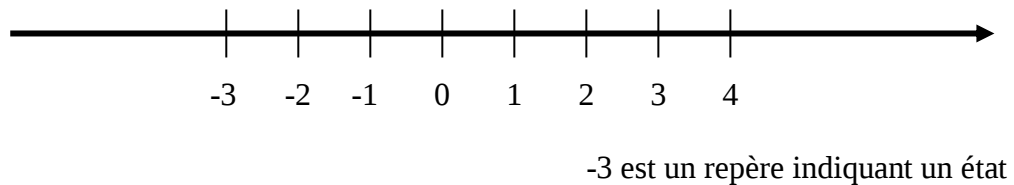
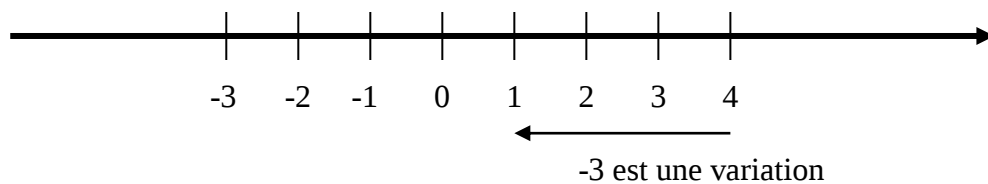
Il paraît peut être plus fécond d'envisager une approche plus théorique de ces nouveaux nombres, en cherchant des nombres qui rendent la soustraction toujours possible et dont le maniement est ensuite

compatible avec les propriétés des opérations mises en évidence sur les nombres positifs.

Pour conclure, on peut introduire les nombres négatifs dans différents contextes :

*Contextes concrets : recette et dépenses, gain et pertes, température, altitudes, chronologie,...

*Contextes de repérage :



*Contexte interne aux mathématiques :

-résolution des équations

1.3-L'ensemble des nombres décimaux :

Un nombre décimal est un nombre qui peut se mettre sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemples : $25,13 = \frac{2513}{10^2}$; $-132,074 = \frac{-132074}{10^3}$

■ Les puissances de 10 :

$$10^n = \underbrace{10 \dots 0}_{(n \text{ zéros})}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{(n \text{ zéros})}$$

$$10^0 = 1$$

Les puissances de 10 permettent de simplifier l'écriture des grands nombres (en astronomie) ou des très petits nombres (en microbiologie ...)

Voici quelques dimensions de l'univers :

- * $1,3 \times 10^7$ m pour le diamètre de la terre.
- * $1,4 \times 10^9$ m pour le diamètre du soleil.
- * $1,5 \times 10^{11}$ m pour la distance terre – soleil.
- * 10^{21} m pour le diamètre de notre galaxie (voie – lactée)
- * 10^{26} m pour le rayon de l'univers visible.
- * 10^{-3} m pour un grain de sable.
- * 10^{-6} m pour une bactérie.
- * 10^{-10} m pour le diamètre de l'atome d'hydrogène.
- * 10^{-15} m pour un proton.

■ Multiples et sous-multiples d'une unité :

Certaines puissances de 10 avec les préfixes qui définissent les multiples et les sous-multiples des unités concernées :

Puissances de 10	10	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Préfixe	déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	peta	exa	zetta	yotta
abréviation	da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y

Puissances de 10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}
Préfixe	déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto	atto	zepto	yocto
abréviation	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y

1.4-L'ensemble des nombres rationnels :

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme quotient de deux entiers relatifs dont le dénominateur est non nul. De ce fait, tout entier relatif est aussi considéré comme nombre rationnel, lorsque le dénominateur vaut 1. le développement décimal des nombres rationnels a la particularité d'être périodique à partir d'une certaine décimale.

Propriétés des nombres rationnels :

*Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain chiffre.

*L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

*La période du développement décimal d'un nombre rationnel réduit $\frac{p}{q}$ est inférieur ou égal à q.

Passage de l'écriture décimale périodique à l'écriture fractionnaire :

Exemples :

$$\begin{aligned}
 \rightarrow 0,373737\dots\dots\dots &= 0,37 \times 1,010101\dots\dots\dots \\
 &= 0,37 \times (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \dots\dots\dots) \\
 &= 0,37 \times \frac{1}{1 - 10^{-2}} \\
 &= 0,37 \times \frac{1}{0,99} \\
 &= \frac{37}{99} \\
 \rightarrow 0,999\dots\dots\dots &= 0,9 \times 1,11\dots\dots\dots \\
 &= 0,9 \times 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots\dots\dots \\
 &= 0,9 \times \frac{1}{1 - 10^{-1}} \\
 &= 0,9 \times \frac{1}{0,9} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

1.5-L'ensemble des nombres réels:

On peut définir un nombre réel comme étant un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels.

Dans la vie courante, les nombres réels sont utilisés pour représenter n'importe quelle mesure physique telle que: le prix d'un produit, la durée entre deux événements, l'altitude (positive ou négative) d'un site géographique, la masse d'un atome ou la distance de la galaxie la plus proche. Ces mesures dépendent du choix d'une unité de mesure, et le résultat s'exprime comme le produit d'un nombre réel par cette unité.

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on distingue:

- *Les nombres rationnels (déjà définis).

- *Les nombres irrationnels qui forment l'ensemble: $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$

■ Nombres irrationnels:

Un nombre irrationnel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste infinie de décimales non répétitives.

La découverte de tels nombres fut annoncée par les grecs cinq siècles avant notre ère lors de l'étude de la diagonale d'un carré, propriété équivalente à l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Cette découverte fut une énorme surprise pour les Pythagoriciens. À la fin du 19^{ème} siècle George CANTOR confirma que l'ensemble des nombres irrationnels est infini et non dénombrable c'est-à-dire qu'il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de rationnels dans $\mathbb{R}$. Les plus célèbres nombres irrationnels sont π et e .

La démonstration de l'irrationalité de π est attribuée à LAMBERT en 1761 quant à l'irrationalité de e , elle fut démontrée par EULER utilisant le développement factoriel de e .

Dans la 2^{ème} moitié du 17^{ème} siècle, on assiste à un extraordinaire épanouissement des mathématiques dans le domaine du calcul des séries et des suites. Certains mathématiciens comme les Bernoulli, Godfried Leibnitz, et d'autres travaillaient sur des séries qui convergent vers des nombres irrationnels. Comme c'est le cas pour la série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1^{k-1}}{k} \text{ qui converge vers } \ln 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{2k+1} \text{ qui converge vers } \frac{\pi}{4}$$

Parmi les nombres irrationnels, on distingue deux catégories:

- *Les nombres irrationnels algébriques.
- *Les nombres irrationnels transcendants.

■ Nombres algébriques:

Un nombre réel est dit algébrique s'il est racine d'au moins un polynôme à coefficients entiers. Ainsi tous les nombres rationnels peuvent être considérés comme des nombres algébriques. Néanmoins, il existe même des irrationnels algébriques comme $\sqrt{2}$ et même $\sqrt[n]{2}$. On montre même que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. Or puisque $\mathbb{R}$ est non dénombrable, alors $\mathbb{R}$ contient d'autres nombres irrationnels qui ne sont pas algébriques. Ce sont les nombres transcendants.

■ Nombres transcendants:

Un nombre est dit transcendant s'il n'est pas algébrique. C'est JOSEPH LIONVILLE qui prouva leur existence en 1844 à partir de séries convergentes comme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$. CHARLES Hermine démontre en 1873 que e est transcendant. Neuf ans plus tard, FERDINAND VON Lindemann démontre la transcendance de π .

L'UNIVERS DU NOMBRE Pi

Le nombre π est peut être l'entité mathématique la plus connue dans le monde. Apparu dès l'antiquité, en tant que rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre, il n'a cessé de susciter l'intérêt de l'homme en mathématiques. Le grand jeu des mathématiciens de toutes les époques a toujours été de définir avec le plus de précisions les premières décimales de π . Cependant, on pourrait s'interroger sur l'utilité de connaître autant de décimales, alors que l'on sait que ce nombre de décimales est infini et non périodique.

1-L'IRRATIONALITE DE Pi:

Proposition:

$$\pi \notin \mathbb{Q}$$

Aperçu sur deux démonstrations:

*La première démonstration a été proposée en 1761 par JOHANN HEINRICH LAMBERT elle consiste à prouver que si "x est un rationnel non nul, alors $\tan(x)$ est irrationnel".

La deuxième démonstration consiste à supposer par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^$ et premiers entre eux. Et puis en considérant les polynômes et la suite d'intégrales $U_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt$, on montre que U_n est un entier strictement positif et que la suite $(U_n)_n$ tend vers 0. D'où l'absurdité.

2-Recherche des décimales du nombre Pi:

2.1.La Méthode de duplication d'Archimède:

Archimède (287 – 212 avant J.C), pour approcher π , propose de considérer un cercle de rayon 1 et d'encadrer le demi périmètre du cercle

par les demi périmètres des polygones réguliers à $N = 6 \cdot 2^n$ côtés exinscrits et inscrits dans le cercle. Il est implicite qu'en prenant n de plus en plus grand, on pourrait obtenir une valeur approchée de π aussi précise qu'on veut. Mais cela prendrait beaucoup de temps et de calculs. Par exemple, pour $n = 4$ c'est-à-dire avec 96 côtés, on obtient $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ d'où $3,1408 < \pi < 3,1423$ et pour $n = 9$ c'est-à-dire avec 3072 côtés, on obtient une approximation de π avec juste 7 décimales précises.

2.2.Les Formules de l'Arctangente:

Avec l'invention du calcul différentiel et surtout les séries infinies au XVII^{ème} siècle, le calcul des décimales de π a connu une révolution en utilisant le développement suivant:

$$\text{Arctan arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \dots$$

Valable pour $|x| \leq 1$

Donc pour $x = 1$, on obtient:

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Alors théoriquement, en effectuant un grand nombre de sommes, on peut approcher π aussi près que l'on veut. Sauf que là aussi la convergence est très lente. Par ailleurs, en faisant 50.000 additions:

$$4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{100.001} \right) = 3,141621653, \text{ on n'obtient que trois}$$

décimales exactes. Tout de même, l'usage de l'arctangente peut être plus intéressant dans la mesure où l'on peut exprimer $\frac{\pi}{4}$ comme somme on différence d'arctangentes d'arguments plus petits et pour laquelle la série converge plus vite. C'est ainsi qu'en 1706 JOHN MACHIN propose la formule suivante:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\text{D'où} \quad \pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \left[4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}} \right]$$

Notons qu'avec $n = 20$ c'est-à-dire qu'à peine avec 40 additions, on trouve 30 décimales exactes de π .

On montre aussi que la formule de MACHIN permet de sonner environ 1,4 nouvelle décimale à chaque nouvelle opération. Autres formules du type MACHIN sont à citer:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{70}\right) + 10 \arctan\left(\frac{1}{99}\right) \text{ (Euler, 1764)}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \text{ (John Dahse, 1844)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1985}\right) \text{ (S.L. Louey, 1893)}$$

La meilleur actuellement sur le marché est celle de STOMER, découverte en 1896:

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 7 \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 12 \arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 24 \arctan\left(\frac{1}{12943}\right)$$

Avec l'augmentation des performances des ordinateurs ainsi qu'au perfectionnement des algorithmes, les records du nombre de décimales exactes calculées du nombre π n'ont cessé d'être battu.

Année	Nombre de décimales	Auteurs
1949	1000	Fergusen – Wrench
1958	10.000	Genuys
1961	100.000	Shanks-Wrench
1973	1.000.000	Guilloud-Bouyer
1982	10.000.000	Kanada-Yoshindo-Tamura
1987	100.000.000	Kanada-Tamura-Kobo
1989	1.000.000.000	Chudnovsky
1997	50.000.000.000	Kanada-Takahaschi
1999	200.000.000.000	Kanada-Takahashi
2010	2699.999.990.000	Bellard

3- TRANSCENDANCE DE Pi:

Proposition :

π est un nombre transcendant

Ce résultat a été démontré en 1882 par FERDINAND VON LINDEMANN, résolvant ainsi un problème géométrique de l'antiquité, appelé: "Quadrature du cercle".

4- QUADRATURE DU CERCLE:

Le problème est de savoir s'il est possible de construire à la règle et le compas, un carré dont la surface est la même qu'un cercle. Donc la quadrature du cercle nécessite la construction à la règle et le compas de $\sqrt{\pi}$. Or PIERRE LAURENT WANTZEL démontra en 1837 que seuls sont constructibles, à la règle et le compas, les nombres réels solutions de polynômes de degré 2^n et à coefficients entiers. Donc les nombres constructibles à la règle et le compas sont des nombres algébriques. Et puisque $\sqrt{\pi}$ est transcendant, on déduit que la quadrature du cercle est impossible.

BIBLIOGRAPHIE § WEBOGRAPHIE

- Jean Paul Delahaye, Le fascinant nombre pi, Belin, Pour la science, Juin 2004
- Eliane Cousquer, Histoire du concept de nombre, IREM de Lille, Octobre 1994
- Jean-Marie De Koninck, Armel Mercier, 1001 Problèmes en théorie classique des nombres, ellipses, Paris, 2004
- Edouard Lebcau, Nombres irrationnels et nombres transcendants, le journal de maths des élèves, Volume 1(1995),N°3

www.animath.fr>pdf>cours arith1

www.pi314.net>ref>le nombre Pi

<http://www.pi314.net/fr/lambert.php>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrature> du cercle

<http://www.maths-rometus.org/mathematiques/maths-et-nombres/categories-de-nombres>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Entier> relatif

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre> irrationnel

<http://serge.mehl.free.fr/chrono/Cantor.html>

COURS DE LOGIQUE ET RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

Plan du cours

1-Calcul propositionnel:

- 1.1. Définition d'une proposition
- 1.2. Définition d'un prédicat
- 1.3. Quantificateurs
- 1.4. Connecteurs logiques
 - 1.4.1. Conjonction
 - 1.4.2. Disjonction
- 1.5. Négation logique
- 1.6. Implication logique
- 1.7. Equivalence logique

2-Tautologies:

3-Différents types de raisonnement mathématique:

- 3.1. Raisonnement déductif
- 3.2. Raisonnement par équivalence
- 3.3. Raisonnement par contre exemple
- 3.4. Raisonnement par contraposition
- 3.5. Raisonnement par disjonction de cas
- 3.6. Raisonnement par l'absurde
- 3.7. Raisonnement par récurrence.

La logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques, d'autre part à leur vérité. Elle se base sur deux principes:

***Principe du tiers-exclu:**

Toute proposition est nécessairement vraie ou fausse, sans valeur intermédiaire possible.

***Principe de non contradiction:**

Toute proposition ne peut être à la fois vraie et fausse

1-Calcul propositionnel:

1.1. Définition d'une proposition:

Une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer la valeur de vérité: Vraie (1) ou faux (0)

Mais jamais les deux à la fois.

On résume ceci dans le tableau suivant:

Appelé "table de vérité" de la proposition P.

P
1
0

Exemples:

P : "25 est un nombre premier"

Q: " $\pi \neq 3,14$ "

R: "Tout nombre algébrique est rationnel".

S: " $x^2 + x \leq 1$ " (où x est un réel)

Notons que la valeur de vérité de S dépend des valeurs du réel x , on parle de prédicat.

1.2. Définition d'un prédicat:

Un prédicat est un énoncé mathématique contenant des variables d'un ensemble et tel que quand on remplace chacune d'elles par une valeur donné de cet ensemble, on obtient une assertion

Exemples:

$$A : " \cos x^2 + \cos^2 y = 1 " \quad \text{ou } x, y \in \mathbb{R}$$

$$B : " x^4 - 2x^2 + 1 = 0 " \quad \text{ou } x \in \mathbb{R}$$

$$C : " ABC \text{ est un triangle rectangle } "$$

(Ou A , B et C sont trois points du plan)

Remarque:

Un prédicat P dépendant des variables $x, y, z, \dots$ peut être noté $P \ x, y, z, \dots$

1.3. Quantificateurs:

A partir d'un prédicat $P \ x$ défini sur un ensemble E , on construit de nouvelles assertions dites "assertions quantifiées", en utilisant les quantificateurs "quelque soit" noté $\forall$ et "il existe" notée $\exists$; obtenant ainsi les deux propositions:

" $\forall x \in E; P \ x$ " Qui est vraie si $P \ x$ est vraie pour tout x de E .

" $\exists x \in E; P \ x$ " Qui est vraie si $P \ x$ est vraie pour au moins un élément x de E .

Remarque:

La proposition " $\exists ! x \in E; P \ x$ " est vraie lorsque $P \ x$ est vraie pour un et un seul élément x de E .

Exemples: Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions:

$$P : " \exists x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x + 3 = 0 "$$

$$Q : " \forall x \in \mathbb{R}^* : x + \frac{1}{x} \geq 2 "$$

$$R : " \exists x \in \mathbb{N}^* : \sqrt{3x+4} \in \mathbb{N} "$$

$$S : " \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists ! r \in]0,1[: x = E \ x + r "$$

$$T : " \exists x \in \mathbb{N} : \frac{x^2 + 1}{3} \in \mathbb{N} "$$

$$U : " \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \leq M "$$

$$V : " \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n "$$

Remarque:

L'ordre des quantificateurs est très important lorsqu'il s'agit de quantificateurs de nature différentes.

1.4.Connecteurs logiques:

1.4.1.Conjonction:

Définition:

Soient P et Q deux propositions.

On définit la proposition "P et Q" appelée conjonction de P et Q, notée " $P \wedge Q$ " et qui est vraie quand P et Q sont vraies toutes les deux.

On résume ceci dans la table de vérité:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemples:

A : " $\pi = \frac{22}{7}$ et $3 < \pi < 4$ "

B : "2 divise 12 et 2 est un nombre premier"

C : " $\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$ et $\frac{3}{7}$ est un nombre transcendant"

1.4.2.Disjonction:

Définition

Soient P et Q deux propositions.

On définit la proposition "P ou Q" appelé disjonction de P et de Q, notée " $P \vee Q$ " et qui est fausse lorsque P et Q sont fausses simultanément.

On résume ceci dans la table de vérité:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemples:

A : " $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ ou $\sqrt{2}^2 = 2$ "

B : "3 est pair ou 3 divise 271".

Remarques:

*On distingue la disjonction inclusive (ou) de la disjonction exclusive qu'on énonce (ou bien P, ou bien Q) et qu'on note: " $P \vee\vee Q$ " et qui est vraie si l'une des deux propositions est vraie et l'autre est fausse.

*Les connecteurs logiques $\wedge$ et $\vee$ sont liés respectivement à l'intersection et à la réunion des ensembles.

1.5.Négation logique:

Définition:

La négation d'une proposition P est une proposition noté (non P) ou $\bar{P}$ ou $\neg P$ et qui est: *vraie lorsque P est fausse
*fausse lorsque P est vraie.

D'où la table de vérité suivante:

P	$\neg P$
1	0
0	1

Exemples: Donner la négation des propositions:

$$P: "\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq \sqrt{3+\sqrt{2}}"$$

$$Q: "\sqrt{2} \in \mathbb{Z}"$$

$$R: "\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+1}{2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+1} > \frac{\sqrt{1+\sqrt{7}}+1}{2\sqrt{1+\sqrt{7}}+1}"$$

$$S: "7 \text{ est un entier impair}"$$

1.6.Implication logique:

Définition:

Soient P et Q deux propositions.

On définit la proposition "P implique Q" qu'on note " $P \Rightarrow Q$ " et qui est fausse seulement lorsque P est vraie et Q est fausse.

D'où la table de vérité suivante:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1

1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemples:

A : "2 est un nombre positif $\Rightarrow |2| = 2$ "

B : "3 divise 5 $\Rightarrow$ 3 divise 10"

C : " $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2 \in \mathbb{Q}$ "

D : " $\pi \neq 3,14 \Rightarrow \pi = \frac{22}{7}$ "

Exercice: Déterminer la valeur de vérité de chacune des deux propositions:

P : " $\forall x \in \mathbb{R} \left[\forall y \in \mathbb{R}, x \leq y^2 \Rightarrow x \leq 0 \right]$ "

Q : " $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leq y^2 \Rightarrow x \leq 0$ "

Remarque:

L'utilisation des parenthèses est parfois nécessaire, et des parenthèses placées différemment donnent des énoncés différents, éventuellement l'un vrai P et l'autre faux Q .

1.7.Equivalence logique:

Définition:

Soient P et Q deux propositions.

On définit la proposition "P équivaut à Q" notée " $P \Leftrightarrow Q$ " et qui est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité.

Ce qui peut être résumé dans la table de vérité suivante:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0

0	0	1
---	---	---

Exemples: $P : "ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2"$
 $Q : "a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|"$

2-Tautologies:

Définition:

Tout assemblage de propositions qui est toujours vrai quelles que soient leurs valeurs de vérités, est appelé "tautologie".

Théorème 1:

Soient P, Q et R trois assertions.
On a les tautologies suivantes:

- 1 $\neg \neg P \Leftrightarrow P$
 - 2 $\neg P \wedge Q \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
 - 3 $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
- } lois de MORGAN
- 4 $P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$
- 5 $P \vee Q \wedge R \Leftrightarrow P \vee Q \wedge P \vee R$
- 6 $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- 7 $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$
- 8 $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$ contraposée d'une implication
- 9 $[\neg P \Rightarrow \neg Q \wedge \neg P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow P$ tautologie du raisonnement par l'absurde
- 10 $\neg P \Rightarrow Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

Théorème 2:

Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat dépendant de la variable x de E. On a:

- 1 $\neg \forall x \in E; P(x) \Leftrightarrow \exists x \in E; \neg P(x)$
- 2 $\neg \exists x \in E; P(x) \Leftrightarrow \forall x \in E; \neg P(x)$

Exercice: Donner la négation de chacune des propositions suivantes:

$$A: "2 < \pi < 3"$$

$$B: " \forall x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} \notin \mathbb{N} "$$

$$C: " \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} : \cos x = a "$$

$$D: " \forall x \in \mathbb{R} \left[x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q} \right] "$$

$$E: " \exists ! x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0 "$$

3-Différents types de raisonnement mathématique:

3.1.Raisonnement déductif:

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant:

Quand P est une proposition vraie et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

C'est le type de raisonnement de base qu'on utilise souvent en mathématique.

Exemple: soient $a, b, c \in 0, +\infty$

$$\text{Montrons que: } a + b + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

3.2.Raisonnement par équivalence:

Ce type de raisonnement se base sur le schéma suivant, à savoir:

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on démontre que P est équivalente à une proposition Q vraie.

Exemple: *soit $x \in 1, +\infty$

$$\text{Montrer que: } \frac{x}{\sqrt{x}-1} \geq 2.$$

*soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $|\sin x \cdot \cos x| \leq \frac{1}{2}$.

3.3.Raisonnement par contre exemple:

Le schéma est le suivant:

Pour montrer que la proposition " $\forall x \in E, P(x)$ " est fausse, on montre que sa négation " $\exists x \in E : \neg P(x)$ " est vraie.

3.4.Raisonnement par contraposition:

Ce raisonnement se base sur la tautologie suivante:

$$" P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P "$$

D'où le schéma suivant:

Pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on montre que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie.

Il arrive dans certaines implications que l'implication contraposée soit "plus évidente".

Exemple: soient $x, y \in \mathbb{R}$

Montrer l'implication :

$$x \neq y \text{ et } xy \neq 1 \Rightarrow x^2 y^2 + y + 1 \neq y^2 x^2 + x + 1$$

3.5.Raisonnement par disjonction des cas:

Le schéma est le suivant:

Pour montrer que la proposition " $\forall x \in E ; P(x)$ " est vraie, on montre que les propositions: " $\forall x \in E_i, P(x)$ " sont vraies, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ou $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ est une partition de E .

Exemple: Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$

$$\text{Par: } f(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$$

Montrer que f est bornée.

3.6.Raisonnement par l'absurde:

Ce raisonnement se base sur la tautologie :

$$"[\neg P \Rightarrow \neg Q \wedge \neg P \Rightarrow Q] \Rightarrow P"$$

Le schéma du raisonnement par l'absurde est :

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on suppose que sa négation $\neg P$ est vraie, et puis par des déductions logiques, on aboutit à une proposition Q vraie sachant qu'elle est déjà fausse. Ce qui est incompatible avec le principe de non contradiction.

Exemple: Soient a, b, c trois entiers relatifs impairs. Montrer que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution rationnelle.

3.7.Raisonnement par récurrence:

On distingue deux types de récurrence:

*Récurrence faible.

*Récurrence forte.

Dans les deux cas, on a à démontrer que la proposition: "pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , $P(n)$ " est vraie ou (n_0 est un entier fixé et $P(n)$ est un prédicat dépendant de l'entier n).

Le principe de la récurrence faible est le suivant:

*On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.

*On montre l'implication: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour n entier fixé de $n_0, +\infty$.

Exemple: Montrer par récurrence que:

$$* \forall n \geq 4 : 2^n \geq n^2$$

$$* \forall n \in \mathbb{N} \quad 6 \text{ divise } n(n+1)(n+2)$$

Le principe de la récurrence forte est le suivant :

*Vérifier que P_{n_0} est vraie.

*Montrer que $\left[\forall k \in [n_0, n] ; P_k \right] \Rightarrow P_{n+1}$ pour n entier fixé de l'intervalle $[n_0, +\infty)$.

Exemple: On pose : $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{N}$

Une récurrence fautive:

Soit $A_{i_1 \leq i \leq n}$ n points du plan.

On montre par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^* / 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ $A_{i_1 \leq i \leq n}$ sont alignés.

*pour $n = 2$; A_1 et A_2 sont alignés.

*supposons que $A_{i_1 \leq i \leq n}$ sont alignés et montrons que $A_{i_1 \leq i \leq n+1}$ sont alignés.

Ou: $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont alignés.

Et $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ sont alignés.

Donc A_{n+1} est aligné avec $A_1, A_2, \dots, A_n$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* / 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ $A_{i_1 \leq i \leq n}$ sont alignés.

Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

<u>Crnaf</u> <u>Casablanca-Settat</u> <u>Prof: B. BENYOUNES</u>	<u>SERIE D'EXERCICES</u> <u>N° 1</u>	<u>MODULE</u> <u>Logique et Raisonnement</u> <u>Mathématiques – Nombres</u>
<u>Exercice 1</u>	Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer que: $\sqrt{4n^2 + 8n + 3} \notin \mathbb{N}$	
<u>Exercice 2</u>	Montrer que: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$	
<u>Exercice 3</u>	Soient x et y deux nombres irrationnels A-t-on: $x + y$ est irrationnel ? $x.y$ est irrationnel ?	
<u>Exercice 4</u>	Soient a et b deux rationnels distincts On pose: $\alpha = \frac{a\sqrt{3} - b}{\sqrt{3} - 1}$ 1) Montrer que: $\alpha \neq a$ 2) Montrer que: $\alpha \notin \mathbb{Q}$	
<u>Exercice 5</u>	Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer que: $n^4 + 3n^2 + 1 \wedge n^3 + 2n = 1$	
<u>Exercice 6</u>	Soit l'ensemble: $E = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n / n \in \mathbb{N}^* \right\}$ 1) Montrer que: $E \subset]1, e[$ 2) Montrer que: $\sqrt{2} \notin E$	
<u>Exercice 7</u>	Soient a et b deux rationnels positifs tels que: $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.	
<u>Exercice 8</u>	Montrer que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique.	
<u>Exercice 9</u>	a, b, c étant trois entiers premiers distincts. Montrer que: $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas premier.	

<u>Crnaf</u> <u>Casablanca-Settat</u> Prof: B. BENYOUNES	<u>SERIE D'EXERCICES</u> <u>N° 2</u>	<u>MODULE</u> <u>Logique et Raisonnement</u> <u>Mathématiques – Nombres</u>
<u>Exercice 1</u>	Montrer que: $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel	
<u>Exercice 2</u>	Soit n un entier non nul. Considérons l'équation algébrique suivante: E : $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + + a_1x + a_0 = 0$ Où les coefficients a_i sont des entiers. Supposons qu'il existe x solution de l'équation E (Un tel x existe si n est impair) Montrer que si x n'est pas entier, alors x est irrationnel.	
<u>Exercice 3</u>	Montrer que: $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ est algébrique.	
<u>Exercice 4</u>	Montrer que: Si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors: $r + x \notin \mathbb{Q}$ Si $r \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors: $rx \notin \mathbb{Q}$ 2) Soient r et r' deux rationnels avec $r < r'$ Et soit n un entier strictement supérieur à $\sqrt{2}$ On pose: $x = r + \frac{\sqrt{2} \cdot r' - r}{n}$ a) Montrer que: $x \in]r, r'[$ b) Montrer que: $x \notin \mathbb{Q}$ c) Que Peut-on conclure ?	
<u>Exercice 5</u>	Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation: $6x^2 - 3xy - 13x + 5y = -11$	
<u>Exercice 6</u>	Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que: $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$	
<u>Exercice 7</u>	Montrer que: $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4}$ est algébrique.	

Crnaf Casablanca-Settat Prof: B. BENYOUNES	SERIE D'EXERCICES N° 3	MODULE Logique et Raisonnement Mathématiques – Nombres
<u>Exercice 1</u>	Considérons la suite U_n définie par: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$ 1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 2) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n \notin \mathbb{Q}$	
<u>Exercice 2</u>	Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ 2) Vérifier que: $\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)$ est solution de l'équation: $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ 3) En déduire que: $\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)$ est irrationnel.	
<u>Exercice 3</u>	1) Soient $p_1, p_2, \dots, p_n$ n nombres premiers Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i. 2) En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.	
<u>Exercice 4</u>	(Majoration du $n^{\text{ième}}$ nombre premier) Pour chaque entier naturel non nul n, on note p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier (par exemple: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$) . 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*, 1$ Montrer que: $p_n \leq p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$ 2) a-En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1$: $p_n \leq p_{n-1}^{n-1} + 1$ b-Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : p_n \leq 2^{2^{n-1}}$.	

Crnaf Casablanca-Settat Prof: B. BENYOUNES	SERIE D'EXERCICES N° 4	MODULE Logique et Raisonnement Mathématiques – Nombres
<u>Exercice 1</u>	Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes: A: "f est majorée" B: "f ne s'annule jamais" C: "f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$" D: "f est croissante" E: "tout entier relatif est la différence de deux entiers naturels".	
<u>Exercice 2</u>	Donner la négation de chacune des propositions suivantes, puis préciser leurs valeurs de vérités: A: " $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{N}^* : \cos x = n$ " B: " $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad p \text{ premier} \Rightarrow p \text{ est impair}$ " C: " $\forall x \in \mathbb{R} \quad [x^2 \geq x \Rightarrow x \geq 1]$ " D: " $\forall x \in 1, +\infty \quad x^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + 2x - 3 \geq 0$ " E: " $\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \exists x \in \mathbb{R} : \cos x + \sin x > a$ " F: " $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$ " G: " $\forall \alpha > 0 \quad \exists x \in 0,1 \quad \exists y \in 0,1 : x^2 + y^2 < \alpha$ "	
<u>Exercice 3</u>	Soient n et p deux entiers relatifs. Montrer que la proposition suivante est vraie: P: " $n.p$ est pair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 8".	
<u>Exercice 4</u>	Soient P, Q et R trois propositions. Montrer les tautologies suivantes: 1 $[P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R] \Rightarrow P \Rightarrow R$ 2 $P \vee Q \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q \Rightarrow Q]$ 3 $[P \Rightarrow Q \vee R] \Leftrightarrow [P \wedge \neg Q \Rightarrow R]$	

Crnaf Casablanca-Settat Prof: B. BENYOUNES	SERIE D'EXERCICES N° 5	MODULE Logique et Raisonnement Mathématiques – Nombres
<u>Exercice 1</u>	Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 + 2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = 0$	
<u>Exercice 2</u>	Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue définie de I vers $\mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in I \quad f^2(x) = 1$ Montrer que: $\forall x \in I \quad f(x) = 1$ ou $\forall x \in I \quad f(x) = -1$	
<u>Exercice 3</u>	Soient a, b et c trois réels tels que: $\forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c \leq 1$ Montrer que: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$	
<u>Exercice 4</u>	Montrer qu'il n'existe pas d'application injective f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^2(x) - 8f(x)^2 = -16$	
<u>Exercice 5</u>	Montrer que: $\exists! x \in \mathbb{N} \quad 6x^2 - 13x + 2 < 0$	
<u>Exercice 6</u>	Soit E un ensemble non vide et f une application de E vers E vérifiant: $f \circ f \circ f = f$ Montrer l'équivalence suivante: $f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective.}$	
<u>Exercice 7</u>	x, y, z sont des réels strictement positifs Montrer que: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$	
<u>Exercice 8</u>	Soit $x, y, z \in]2, +\infty[$ Montrer l'implication: $x + y \leq z \Rightarrow xy \leq z$	
<u>Exercice 9</u>	Montrer que si a est un nombre algébrique positif, alors $\sqrt{a}$ est aussi algébrique.	
<u>Exercice 10</u>	Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction g paire et une fonction h impaire tels que: $f = g + h$.	

Crnaf Casablanca-Settat Prof: B. BENYOUNES	SERIE D'EXERCICES N° 6	MODULE Logique et Raisonnement Mathématiques – Nombres
<u>Exercice 1</u>	Soit $a, b, c \in 0, +\infty$ tel que: $abc = 1$ Montrer que: $a + b + c \geq 3$	
<u>Exercice 2</u>	Montrer que: 1 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} : [x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y]$ 2 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} : [x \neq y \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} \neq y - \sqrt{y^2 + 1}]$	
<u>Exercice 3</u>	Montrer par récurrence: 1 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3^n \geq n + 2 \quad 2^{n-1}$ 2 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3 \text{ divise } 2^{2^n} - 1$ 3 $\forall n \geq 3 \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq n + 1$ 4 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$	
<u>Exercice 4</u>	1) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} 1 + \sqrt{2}^n = a_n + b_n \sqrt{2} \\ a_n^2 - 2b_n^2 = -1^n \end{cases}$ 2) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N}^* : 1 + \sqrt{2}^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$	
<u>Exercice 5</u>	1) Montrer que: $\forall x \in 0, +\infty \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$ 2) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{N}^* \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in 0, +\infty$ $x_1 + x_2 + \dots + x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$	
<u>Exercice 6</u>	Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes: a $\sqrt{x+2} = x$ b $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} = x$ c $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$	

Crnaf Casablanca-Settat Prof: B. BENYOUNES	SERIE D'EXERCICES N° 7	MODULE Logique et Raisonnement Mathématiques – Nombres
<u>Exercice 1</u>	Soit f une fonction strictement croissante sur l'intervalle I. Montrer qu'ils n'existent pas deux éléments a et b de I tels que: $f(a) = b \quad \text{et} \quad f(b) = a$	
<u>Exercice 2</u>	Montrer que: $1 \quad \forall x \in 1, +\infty : \frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$ $2 \quad \forall x \in 2, +\infty : x + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ $3 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > \frac{1}{2}$	
<u>Exercice 3</u>	Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $E : 2nx^2 - 2n^2x + n^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$.	
<u>Exercice 4</u>	Soient x et y deux nombres réels non nuls. Montrer que: $x + \sqrt{x^2 + 1} - y + \sqrt{y^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$	
<u>Exercice 5</u>	Montrer que: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3 \left[x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \right]$	
<u>Exercice 6</u>	Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations: $a \quad x < \sqrt{x+2}$ $b \quad \sqrt{x+1} \geq x-5$ $c \quad 2-x \leq \sqrt{x^2-5x+4}$	
<u>Exercice 7</u>	1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} 2 + \sqrt{3}^n = a_n + b_n \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3}^n = a_n - b_n \sqrt{3} \end{cases}$ 2) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 + \sqrt{3}^n + 2 - \sqrt{3}^n \text{ est un entier pair.}$	

Crnaf Casablanca-Settat Prof: B. BENYOUNES	SERIE D'EXERCICES N° 8	MODULE Logique et Raisonnement Mathématiques – Nombres
<u>Exercice 1</u>	1-Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^* - 1 \quad \exists p_n, q_n \in \mathbb{N}^{*2} : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{2p_n + 1}{2q_n}$ 2-En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}^* - 1 \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}.$	
<u>Exercice 2</u>	Prouver que pour vérifier qu'un entier naturel p est premier, il suffit de vérifier qu'il n'a pas de diviseurs premiers inférieur ou égal à $\sqrt{p}$.	
<u>Exercice 3</u>	1-Vérifier que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation: $E \quad 4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ 2-En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est irrationnel.	
<u>Exercice 4</u>	Montrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que: a^b soit rationnel.	
<u>Exercice 5</u>	1-Soit x un entier naturel non nul. On note N_x le nombre de chiffre formant x en écriture décimale. Montrer que: $N_x = E \log x + 1$ 2-Déterminer le nombre de chiffres apparaissant dans l'écriture décimale des nombres suivants: $2^{43112609} - 1$ (nombre premier découvert en 2007) et $500!$ et e^{e^e}	
<u>Exercice 6</u>	Montrer la formule de John Machin suivante: $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$	

<u>Exercice 7</u>	Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Montrer que $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.
<u>Exercice 8</u>	Soit x un réel. 1) Montrer l'implication: "x^7 et x^{12} sont rationnels $\Rightarrow x$ est rationnel". 2) Montrer par un contre exemple que l'implication: "x^4 et x^{10} sont rationnels $\Rightarrow x$ est rationnel" est fausse.
<u>Exercice 9</u>	Soient n et p deux entiers relatifs Montrer que: $np \text{ est pair ou } n^2 - p^2 \text{ est un multiple de 8.}$
<u>Exercice 10</u>	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\sqrt{x+1} \geq x-5$
<u>Exercice 11</u>	Montrer que: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \text{ est un nombre irrationnel.}$
<u>Exercice 12</u>	Soit $m \in \mathbb{N}^*$. 1) Montrer que si α est un nombre transcendant, alors α^m est aussi transcendant. 2) Montrer que $\sqrt[3]{2}.e$ est un nombre irrationnel. (Rappelons que e est un nombre transcendant).

<u>Exercice 13</u>	Soit $a = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ Montrer que a est un nombre algébrique.
<u>Exercice 14</u>	Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}} \notin \mathbb{N}$ (Indication: Encadrer ce nombre entre deux nombres entiers naturels consécutifs).
<u>Exercice 15</u>	1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2) \quad \begin{cases} (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3} \\ (2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n \sqrt{3} \end{cases}$ 2) En déduire que: $S_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair, pour tout entier naturel n. 3) Montrer que: $E\left((2 + \sqrt{3})^n\right) = S_n - 1.$
<u>Exercice 16</u>	Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose: $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) (\exists (p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2) : H_n = \frac{2p_n + 1}{2q_n}$ 2) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad H_n \notin \mathbb{N}$

